MAKOSO, 5.kolo

Matematická korespondenční soutěž, ZŠ Brno, Sirotkova 36, 616 00 Brno, škola s rozšířenou výukou matematiky a informatiky

Jméno, příjmení	Třída	Hodnocení	Pořadí

Termín odevzdání: do 12.5.2017

Řady a posloupnosti

Matematické téma, která nás provází běžně v běžném životě zejména ve finanční sféře. Navýšení úspor či zúročení vkladů se děje dle zřetelných matematických pravidel a jednotlivé hodnoty se mohou nadefinovat jako členy jisté řady či posloupnosti. Samozřejmě jako i jiné oblasti matematiky, tak i toto odvětví má svoje historické ikony. Patří mezi ně zejména Zénon z Eleje. Zénon z Eleje (495 př. n. l. – 430 př. n. l.) byl filosof, který pomohl založit Athény jako řecké centrum učení. Byl motivován konstruovat své paradoxy i přes filosofický spor s Parmenidem. Stejně jako jeho nejznámější paradox Achilles a želva, jsou i ostatní jeho paradoxy založeny na nemožnosti konečného popsání pohybu. Jeho paradoxy jsou nepřetržitě diskutovány po staletí.

Z moderní historie si dovolme zmínit Colin Maclaurin. Colin Maclaurin (1698-1746) byl skotský matematik. Zabýval se především algebrou a geometrií. Maclaurinova řada, jakožto speciální případ Taylorovy řady, je pojmenována po něm. Nezávisle na Eulerovi objevil zákonitost dnes známou jako Eulerova-Maclaurinova věta, která popisuje vztah mezi sčítáním funkčních hodnot nějaké funkce a jejím integrálem.

Po krátkém historickém okénku se pojďme podívat na jednoduchém příkladu o čem bude řeč. Přirozená čísla mohou představovat jistou posloupnost. Konkrétně ji můžeme charakterizovat jako posloupnost aritmetickou. Každá takováto posloupnost je definována tak, že každé číslo posloupnosti = člen posloupnosti se mění (roste či klesá vždy o pevnou hodnotu, tzv. diferenci. V našem případě by diference měla hodnotu jedna, platí totiž, že přirozená čísla vzrůstají vždy o hodnotu 1. Určení diference je jednou ze základních otázek při zkoumání posloupnosti. Druhou věcí je určení hodnoty jistého členu posloupnosti. Např. otázkou by mohlo být, jaká je hodnota 120 členu posloupnosti přirozených čísel, kdy posloupnost začíná číslem 1. Odpověď je jednoduchá, je to číslo 120. V případě složitějších posloupností není odpověď tak jednoduchá. Mezi jednotlivé charakteristiky posloupností patří také vzoreček pro určení hodnoty libovolného členu posloupnosti. Poslední otázkou, kterou budeme v tomto dílu MAKOSA řešit bude součet hodnot určitého počtu členů v posloupnosti. Jistě opět existuje vzoreček, pro nás amatéry by však přicházelo v úvahu jednotlivé členy sčítat. Cesta je to možná ale zdlouhavá a to zejména v případě, kdy počet členů posloupnosti bude výrazně velké číslo.

Takže vše ještě jednou

1, 2, 3, 4, 5, …. přirozená čísla ale také **číselná posloupnost** = řada čísel sestavená dle jistého pravidel.

Diference posloupnosti je hodnota, o kterou se **členové posloupnosti** pravidelně mění. V teorii posupností se značí písmenem **d**.

Posloupnost: 1, 2, 3, 4, 5, …..

První člen $a_1 = 1$, druhý člen $a_2 = 2$, třetí člen $a_3 = 3$….je jednoduché určit, že diference **d = 1**. Vzoreček je jednoduchý (pozor, pouze pro jistý typ posloupnosti, tzv. aritmetické, které budeme řešit), tzn. např. $d = a_2 - a_1$, obecně $\mathbf{d = a_{n+1} - a_n}$.

Druhým našim úkolem bude určení hodnoty jistého konkrétního členu v posloupnosti. Naše stará známá posloupnost 1, 2, 3, 4, 5….je jednoduchá, Tudíž určení hodnoty dvacátéhotřetího členu je snadné, tzn. $a_{23} = 23$. Existuje však vzoreček, který nám pomůže v těžších úlohách. Uvědom si, že je asi dobrá znát hodnotu prvního členu, a_1. Od něho totiž celá posloupnost startuje a s pravidelností se mění. Svou roli hraje i diference. Můžu totiž říci, že ke konkrétnímu členu posloupnosti „doskáčeme“ od členu prvního přes jistý počet diferencí. V našem případě by to bylo tak že od členu a_1 se k členu a_{23} dostaneme přes 22 „mezer“, texy přes 22 diferencí. Mohl by být vzorec následující? $\boldsymbol{a_{23} = a_1 + 22 \cdot d}$? Myslím si že by mohl. Vyšlo by nám $a_{23} = 1 + 22 \cdot 1 = 23$, což vychází. Obecně tedy $\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1) \cdot d}$.

A poslední věc je tady, součet posloupnosti či alespoň její části. Vezmeme si např. čísla 1, 2, 3, …, 9, Vytvořit součet je jednoduchý a to 1 +2 + 3 + ….+ 9 = 45. Vzorec pro součet pracuje s tím, že členové posloupnosti se budou sčítat výhodně. A to následujícím postupem (1 + 9) + (2 + 8) + (3 + 7) + (4 + 6) + 5 = 45. Snížíme tak počet hodnot členů, které budu sčítat, jednotlivé součty nám vychází stejně a to tak, jako bychom sečetli první a poslední člen. Vztah lze zapsat např. následovně $\boldsymbol{s_n=[\,(a_1+a_n)\cdot n\,] : 2}$. Můžeš si zkusit sám, že to funguje.

Výše představené informace jsou jen zlomky toho, co si celá problematika zaslouží představit. Přesto by ti mohly ukázat cestu, jak nalézt správné řešení. Hodně zdaru….

Úloha č. 1

V posloupnosti 4, 8, 12, 16, 20, …. Urči diferenci **d**, hodnotu členu posloupnosti $\mathbf{a_{43}}$ a součet prvních 51 členů posloupnosti $\mathbf{s_{51}}$.

Úloha č. 2

V řadě všech ***lichých přirozených čísel menších něž 1000*** urči diferenci posloupnosti, hodnotu členu $\mathbf{a_{222}}$ a **součet** všech takto nadefinovaných čísel.

Úloha č. 3

A něco z praxe. Prodejna potravin obdržela nejnovější druh nealkoholického nápoje v plechovkách. Za účelem jeho propagace bude z plechovek při volné stěně jednoho regálu sestaven ,,rovnoramenný trojúhelník“. Do nejspodnější vrstvy tohoto ,,trojúhelníku“ se postaví vedle sebe 25 plechovek, do každé následující vyšší o 1 plechovku méně, v nejhořejší vrstvě bude jediná plechovka. Kolik plechovek musí učeň Karel pro tuto stavbu přivézt ze skladu?